بالانس دینامیکی کامل نیرویی یک روبات موازی کروی جدید با ساختار 3(RPSP)-S با افزودن یک مکانیزم چندمیله‌ای*

(یادداشت پژوهشی)

مهدیه حیدری[۱]		جواد انفرادی[۲]

چکیده در این مقاله بررسی شرایط بالانس دینامیکی نیرویی یک روبات موازی کروی جدید بااستفاده از روش افزودن مکانیزم اضافه انجام می‌شود. در روش پیشنهادی از یک مکانیزم اضافه و اتصال آن به هر شاخه روبات به‌گونه‌ای استفاده می‌شود که باعث حذف شتاب‌های کوریولیس و درنتیجه حذف نیروهای لرزشی ناشی از رفت‌وبرگشت جرم لغزنده در معادلات بالانس دینامیکی نیرویی روبات شود. سپس با افزودن سه وزنه به هر شاخه روبات، بالانس نیرویی روبات انجام می‌شود. درپایان، با تحلیل دینامیکی روبات بااستفاده از نرم‌افزار آدامز، نشان داده می‌شود که بااستفاده از روش ارائه‌شده، نیروهای لرزشی منتقل‌شده به پایهٔ روبات به‌طور میانگین درراستای x ۹۸٪، درراستای y ۷۹٪ و درراستای z ۹۹.٤٪ کاهش خواهند یافت.

واژه‌های کلیدی بالانس دینامیکی نیرویی; روبات موازی کروی; نیروی لرزشی; جرم افزوده.

Complete Dynamic Shaking Force Balancing of a 3(RPSP)-S Spherical Parallel Robot Using Extra Linkage

M. Heydari		J. Enferadi

Abstract *In this paper, an approach for reducing the shaking force of a spherical parallel robot using extra mechanisms is proposed. The proposed method vanishes the Coriolis acceleration terms due to moving the slider links on each branch from force balancing equation. For this purpose, two links are added to each branch of the manipulator as an extra linkage mechanism. Next, three weights are added to each branch of the robot for reducing the applied shaking forces on the base platform. Finally, the dynamic numerical simulations is performed using ADAMS software. The results show a reduction in the applied shaking forces on the base as much as 98%, 79% and 99.4% along the X, Y and Z axes, respectively.*

Key Words Shaking force; Force balancing; Spherical parallel robot; Inverse kinematics.

---

*تاریخ دریافت مقاله ۹۵/۸/۲۸ و تاریخ پذیرش آن ۹٦/۳/۲۷ می‌باشد. DOI: 10.22067/fum-mech.v29i2.60400

(۱) کارشناس ارشد مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد مشهد.

(۲) نویسندهٔ مسئول: استادیار گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد مشهد. enferadi5637@mshdiau.ac.ir

مقدمه

مکانیزم‌های موازی به‌عنوان مکانیزم‌هایی تعریف می‌شوند که صفحهٔ متحرک آنها توسط شاخه‌های سینماتیکی متعدد به پایهٔ ثابت متصل می‌شود و هر شاخه نیز می‌تواند به‌عنوان یک مکانیزم سری درنظر گرفته شود. روبات‌های موازی به‌وسیلهٔ مک کالیون و فم [1] پیشنهاد داده شد و هانت [2] مطالعات مقدماتی ترکیب‌بندی‌های روبات‌های موازی مختلف را انجام داد. درمقایسه با مکانیزم‌های سری مکانیزم‌های موازی اینرسی حرکتی کمتر، سفتی بالاتر، نسبت قدرت به وزن بالاتر و... دارند. ازاین‌رو مکانیزم‌های موازی برای کاربردهای روباتیکی پیشرفته با سرعت بالا بسیار مناسب هستند. نظیر سایر وسایل روباتیکی، آنها نیز نیروها و گشتاورهایی را به پایهٔ خود در حین این حرکت‌های سریع وارد می‌کنند و باعث خستگی، ارتعاش، صدا و خرابی در ساختارهای حمایتی مکانیزم می‌شوند.

در طول چند دهٔ گذشته روبات‌های موازی راه خود را به صنعت برای برنامه‌های کاربردی نظیر کارهای برداشت و گذاشت سریع، پیدا کرده‌اند. تقاضای مداوم برای افزایش سرعت عملیاتی این روبات‌ها، طراح را با مسائل مختلف به چالش می‌کشد؛ یکی از این مسائل ارتعاش شدید در پایهٔ روبات به‌علت نیروهای لرزشی و گشتاورهای لرزشی یعنی نیروها و گشتاورهای اینرسی اعمال‌شده توسط روبات به پایه می‌باشد که در عمل باعث آسیب‌هایی به سیستم‌های مکانیکی و سیستم کنترل روبات و همچنین ماشین‌آلات مجاور می‌شود.

بالانس مکانیزم‌ها یک موضوع تحقیقاتی بسیار مهم در چند دهٔ اخیر بوده است [3-8]. یک مکانیزم بالانس‌شده خصوصیات دینامیکی بهتری دارد و ارتعاشات کمتری در حین حرکت به پایهٔ روبات وارد می‌کند. ازاین‌رو کارهای مختلفی روی مطالعهٔ بالانس دینامیکی روبات‌های موازی صفحه‌ای شده است؛ اما دربارهٔ بالانس نیرویی و گشتاوری روبات‌های موازی کروی کارهای قابل‌توجهی انجام نشده است و بالانس دینامیکی روبات‌های موازی فضایی چند درجه آزادی به‌دلیل پیچیده بودن مسئله، اصلاً مورد توجه محققان نبوده است.

برای از بین بردن نیروهای لرزشی تاکنون روش‌هایی مانند: افزودن ساختارهای اضافه [9]، اضافه کردن اعضای الاستیک [10]، کنترل شتاب مرکز جرم کلی مکانیزم [3, 4] ارائه شده‌اند.

همچنین برای از بین بردن مومنتوم لرزشی نیز روش‌هایی مانند: استفاده از چرخش‌های معکوس [11]، اضافه کردن لینک‌های چهار عضوی [12]، به‌کارگیری مکانیزم افزونه که مسیرهای بهینهٔ لینک‌های حرکتی را تولید می‌کند [13]، چرخش معین مجری نهایی [14] و بالانسینگ توسط اضافه کردن یک چرخ لنگر اینرسی چرخشی با یک سرعت زاویه‌ای معین [5,15] ارائه شده‌اند.

باوجود این‌که بیش از یک قرن است که موضوع بالانس دینامیکی مکانیزم‌ها در حال بررسی است [16]، بالانس دینامیکی روبات‌ها و به‌ویژه بالانس روبات‌های موازی به‌تازگی آغاز شده است. چونگ و چو [17] بالانس نیروی لرزشی روبات سری پوما ۷۶۰ را در سال ۱۹۸۸ مورد مطالعه قرار دادند. آنها معادلات دینامیکی حرکت را براساس روش لاگرانژ به‌دست آوردند و از طریق افزودن وزنه و یک مکانیزم ویژه روبات را بالانس کردند. در سال ۲۰۰۰ ریکارد و گسلین [12] بالانس دینامیکی روبات‌های موازی را برای اولین‌بار در یک راه‌حل کلی‌تر ارائه دادند. روش آنها بر این اساس بود که از مکانیزم‌های چهار لینکی که بالانس دینامیکی شده بودند برای ساختن هر کدام از پایه‌های روبات سه درجه آزادی صفحه‌ای استفاده کردند. ایشان از مکانیزم‌هایی استفاده کردند که طبق اندازه‌های سینماتیکی و شکل اولیهٔ خاص خود بالانس

هستند و هیچ جرم اضافه‌ای یا چرخش معکوس اضافه‌ای به سیستم اضافه نمی‌کنند و شرایط بالانس برطبق ثابت ماندن مومنتوم خطی و زاویه‌ای روبات را به‌دست آوردند [12].

اگرچه مقالات مختلفی پس از آن نیز منتشر شده است، اما در مجموع حجم متون مربوط به این حوزه قابل توجه نیست. علاوه بر این، بسیاری از مقالات به بررسی بالانس روبات‌های چند درجه آزادی بااستفاده از راه‌حل‌های تعادل برای مکانیزم‌ها پرداخته‌اند که معایب قابل‌توجهی مانند افزودن جرم اضافی و اینرسی اضافی دارند [19-17]. اینرسی بیشتر باعث می‌شود که توان بیشتری برای حرکت محرک‌ها مورد نیاز باشد و جرم بیشتر به‌معنی نیاز داشتن توان بیشتر برای بالا بردن و کنترل مجری نهایی در فضای کاری است. ویجک و هردر [20] در مقاله‌ای به مرور، مقایسه و ارزیابی تعدادی از روش‌ها که جرم و اینرسی چرخشی معکوس به روبات اضافه می‌کنند، پرداخته‌اند و یک شاخص نرمال‌شده برای قضاوت درمورد انواع روش‌های ارائه‌شده معرفی کرده‌اند. به‌تازگی راه‌حل‌های بالانس که استفاده از ساختار موازی روبات‌ها را دربر می‌گیرد، نشان داده است که روش کارامدی است. ویجک و هردر [9] بااستفاده از روش فیشر به بیان روش‌هایی برای به‌دست آوردن مرکز جرم یک مکانیسم در یک نقطهٔ تغییرناپذیر برروی یکی از لینک‌ها پرداختند. بااستفاده از این روش مکانیزم را بدون اضافه کردن جرم چرخشی معکوس و با اضافه کردن ساختارهایی به ساختار اولیهٔ مکانیزم بالانس کردند.

آراکلیان و همکاران [21] به بیان روشی برمبنای روش‌های کنترلی پرداختند. آنها چند مسیر مختلف برای حرکت موردنظر مجری نهایی درنظر گرفتند و مسیری که پتانسیل کمتری دارد را انتخاب کرده و با طراحی کنترلر، روبات را از مسیر بهینه حرکت دادند، به‌صورتی که کمترین نیرو و مومنتوم لرزشی به پایهٔ روبات وارد می‌شد. بروت و آراکلیان [22] برای بالانس یک مکانیزم چهار میله از مکانیزم دیگری که به‌طور دینامیکی بالانس است، استفاده کردند و درنهایت فقط با اضافه کردن چند جرم چرخشی معکوس، مکانیزم بدون اضافه کردن هیچ اینرسی چرخشی معکوسی، هم بالانس نیرویی و هم بالانس مومنتومی شده است. وو و گسلین [23] یک روبات سه درجه آزادی و یک روبات شش درجه آزادی را توسط اضافه کردن یک مکانیزم متوازی‌السطوح به پایه‌های روبات و اضافه کردن جرم و اینرسی چرخشی معکوس به این مکانیزم بالانس نیرویی و مومنتومی کردند.

الیسی و شیرین‌زاده [24] بااستفاده از جرم‌های اضافه و متصل کردن دو عدد فنر به لینک‌های محرک، بالانس استاتیکی روبات موازی دو درجه آزادی صفحه‌ای 5R را انجام دادند. آنها در مقالهٔ دیگری [25] بالانس دینامیکی همین روبات را با اضافه کردن چهار میله که به انتهای آنها جرمی اضافه شده بود، انجام دادند. همچنین درسیگ و دین [26] طراحی و بهینه‌سازی همین روبات را با درنظر گرفتن دو شرط ایزوتروپی سینماتیکی و بالانس استاتیکی آن انجام داده‌اند. یکی دیگر از روش‌های مورد استفاده که برای بالانس کامل دینامیکی نیروها و گشتاورهای لرزشی مکانیزم‌های صفحه‌ای به‌کار گرفته شده است، استفاده از یک جسم صلب متحرک است [27]. بالانس کامل دینامیکی نیروها و گشتاورهای لرزشی یک روبات موازی صفحه که قابلیت دوران نامحدود حول محور عمود بر صفحه را دارد نیز بااستفاده از افزودن جرم‌های اضافه به مکانیزم انجام شده است [28]. حداقل‌سازی نیروها و گشتاورهای لرزشی دینامیکی مکانیزم‌های صفحه‌ای حلقه بسته بااستفاده از بهینه‌سازی شکل لینک‌های مکانیزم نیز در مرجع [29] انجام شده است. بهینه‌سازی سازی شکل لینک‌های این مکانیزم توسط نقاط کنترلی منحنی‌های

بی- اسپیلاین صورت پذیرفته است. بالانس دینامیکی یک روبات افزونهٔ صفحه‌ای موازی با ساختار 4-RRR به‌صورت تحلیلی و آزمایشگاهی در مراجع [30, 31] مورد بررسی قرار گرفته است. همچنین بالانس دینامیکی برای حداقل‌سازی نیروهای لرزشی دینامیکی به پایهٔ روبات سه درجه آزادی موازی دلتا با اضافه کردن سه جرم متعادل‌کننده و استفاده از دو لینک اضافی انجام شده است .[32]

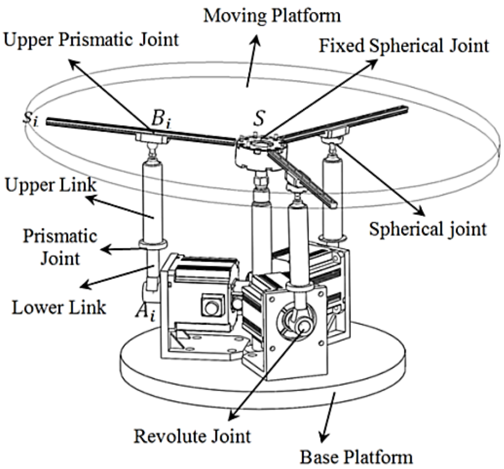
در روبات‌هایی که قید رفت‌وبرگشتی دارند، حذف نیروهای اینرسی منتقل‌شده به پایهٔ روبات یک چالش اساسی برای این‌گونه روبات‌ها محسوب می‌شود. در روبات موردنظر اگر بخواهیم از روش معمول افزودن وزنه استفاده کنیم به‌دلیل وجود قید رفت‌وبرگشتی باید وزنه‌ای را اضافه کنیم که به تناسب حرکت رفت‌وبرگشتی قید مربوط، حرکت کند که کار بسیار دشواری می‌باشد و اگر بخواهیم هم‌زمان بالانس گشتاور لرزشی را نیز انجام بدهیم این روش صحیح نیست، بنابراین ما ابتدا یک مکانیزم اضافه را به پایهٔ روبات اضافه می‌کنیم که مشکل قید رفت و برگشتی و ظاهر شدن ترم‌های سرعت و شتاب‌های شعاعی در نیروهای لرزشی را رفع می‌کند، سپس از روش افزودن وزنه برای بالانس روبات استفاده می‌کنیم. درانتها بااستفاده از نرم‌افزار آدامز نتایج بررسی می‌شود و مشاهده می‌گردد که بااستفاده از روش ارائه‌شده نیروهای لرزشی منتقل‌شونده به پایهٔ روبات به‌طور میانگین درراستای x، ۹۸ درصد، درراستای y، ۷۹ درصد و درراستای z، ۹۹ درصد کاهش خواهند یافت؛ البته با این روش جرم ربات نسبت به حالت اولیه زیادتر می‌شود.

معرفی روبات کروی 3(RPSP)-S

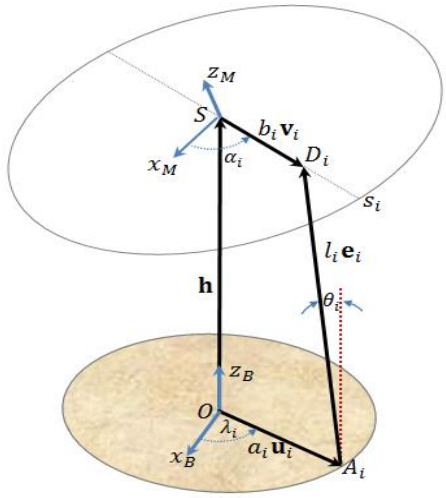
در روبات موازی کروی جدید 3(RPSP)-S صفحهٔ ثابت و صفحهٔ متحرک از طریق سه زنجیرهٔ سینماتیکی با ساختار مشابه به یکدیگر متصل شده‌اند. همچنین یک پایهٔ ثابت که در انتهای آن یک مفصل کروی درنظر گرفته شده است به‌طور مستقیم به صفحهٔ متحرک به یکدیگر متصل شده است. مانند ساختار اکثر روبات‌های موازی این زنجیره‌های سینماتیک با ساختارهای گوناگون اما یکسان و تکرارپذیر با تعداد مختلف با یکدیگر ترکیب می‌شوند و باعث به‌وجودآمدن سیستم‌های گوناگون در طراحی روبات‌های موازی می‌شوند. در روبات کروی موازی موردنظر سه شاخهٔ سینماتیکی با ساختارهای یکسان وجود دارد. در هر زنجیرهٔ سینماتیکی به‌ترتیب یک مفصل محرک چرخشی، یک مفصل کشویی، یک مفصل کروی و یک مفصل کشویی درنظر گرفته شده است.

در شکل (۱) روبات موازی کروی 3(RPSP)-S با محرک‌های زاویه‌ای نشان داده شده است. همچنین یکی از زنجیره‌های سینماتیکی این روبات نیز به‌صورت برداری در شکل (۲) نشان داده شده است.

در این روبات بردار $\mathbf{h}$ نشان‌دهنده طول و راستای ستون وسط روبات، $\mathbf{v}_i$ بردار یکه روی صفحهٔ متحرک (که برای نشان دادن جهت و راستای هر یک از مفاصل لغزشی صفحهٔ متحرک به‌کار برده می‌شود)، $\mathbf{u}_i$ بیانگر بردار یکه نشان‌دهندهٔ راستای دوران مفصل چرخشی متصل به پایهٔ روبات، $\mathbf{e}_i$ بردار یکه نشان‌دهندهٔ راستای بازوی متحرک اتصال‌دهندهٔ دو صفحهٔ ثابت و متحرک، b_i بیانگر مقدار عددی فاصله میان اتصال کروی مرکزی تا انتهای هر یک از مفاصل لغزشی روی صفحهٔ متحرک، a_i نشان‌دهندهٔ مقدار عددی فاصله میان اتصال مفصل چرخشی تا ستون وسط روبات، l_i برابر با طول هر شاخه روبات و θ_i بیانگر مقدار چرخش مفصل چرخشی محرک هستند.



شکل ۱ روبات 3(RPSP)-S با محرک زاویه‌ای



شکل ۲ مشخصات هندسی و پارامترهای یک شاخه روبات 3(RPSP)-S

سینماتیک معکوس روبات 3(RPSP)-S

قبل از انجام تحلیل سینماتیک معکوس روبات، لازم است دستگاه‌های مختصات به‌کار گرفته‌شده معرفی شوند. در تحلیل این روبات از دو سیستم دستگاه مختصات استفاده شده است. دستگاه مختصات ثابت {B} که متصل به پایهٔ ثابت روبات است و مبدأ آن در مرکز صفحهٔ ثابت درنظر گرفته شده است. محور x_B این دستگاه درراستای بردار یکه $\mathbf{u}_1$ و محور z_B آن درراستای $\mathbf{u}_i \times \mathbf{u}_{i+1}$ درنظر گرفته شده است و محور y_B آن نیز بااستفاده از قانون دست راست تعیین می‌شود. دستگاه مختصات متحرک {M} که به صفحهٔ متحرک متصل شده است و مبدأ آن در مرکز صفحهٔ متحرک (مفصل کروی پایه‌ثابت) قرار گرفته است. محور x_M این دستگاه درراستای بردار یکه $\mathbf{v}_1$ و محور z_M آن درراستای $\mathbf{v}_i \times \mathbf{v}_{i+1}$ درنظر گرفته شده‌اند و محور y_M آن نیز می‌تواند با قانون دست راست تعیین شود. برای ارتباط این دو دستگاه با یکدیگر، از ماتریس دورانی که برحسب زوایای اویلر ثابت XYZ که با رول (φ_x)، پیچ (φ_y) و یاو (φ_z) مشخص می‌شوند، استفاده می‌گردد. بنابراین این ماتریس را می‌توان به‌صورت زیر نمایش داد:

$$
{}^{\mathbf{B}}_{\mathbf{M}}\mathbf{R} = \mathbf{R}_Z(\varphi_z)\mathbf{R}_Y(\varphi_y)\mathbf{R}_X(\varphi_x) =
\begin{bmatrix} c\varphi_z c\varphi_y & c\varphi_z s\varphi_y s\varphi_x - s\varphi_z c\varphi_x & c\varphi_z s\varphi_y c\varphi_x + s\varphi_z s\varphi_x \\ s\varphi_z c\varphi_y & s\varphi_z s\varphi_y s\varphi_x + c\varphi_z c\varphi_x & s\varphi_z s\varphi_y c\varphi_x - c\varphi_z s\varphi_x \\ -s\varphi_y & c\varphi_y s\varphi_x & c\varphi_y c\varphi_x \end{bmatrix} \quad (۱)
$$

سینماتیک معکوس شامل محاسبهٔ مقادیر متغیرهای محرک‌ها برای جهت‌گیری معلوم صفحهٔ متحرک نسبت به صفحهٔ ثابت است. برای روبات موازی کروی 3(RPSP)-S که دارای سه زنجیرهٔ سینماتیکی است، برای هر زنجیرهٔ سینماتیکی می‌توان نوشت:

$$
\mathbf{h} + b_i\mathbf{v}_i = a_i\mathbf{u}_i + l_i\mathbf{e}_i \quad (۲)
$$

باتوجه به این‌که مقادیر بردار $\mathbf{v}_i$ در دستگاه {M} معلوم است، به‌کمک ماتریس دوران ${}^{B}_{M}\boldsymbol{R}$ به‌آسانی می‌توان بردار $\mathbf{v}_i$ را در دستگاه $\{B\}$ توصیف کرد. بنابراین می‌توان رابطهٔ (۳) را به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

$$
\mathbf{h} + b_i\, {}^{B}_{M}\mathbf{R}^{M}\mathbf{v}_i = a_i\mathbf{u}_i + l_i\mathbf{e}_i \quad (۳)
$$

$$
\mathbf{u}_i = [\cos\lambda_i \quad \sin\lambda_i \quad 0]^{T} \quad (٤)
$$

که در آنها زاویهٔ λ_i بیانگر زاویهٔ بین بردارهای یکه $\mathbf{u}_i$ و محور x_B است. همچنین بردارهای ${}^M\mathbf{v}_i$ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$ {}^M\mathbf{v}_i = [\cos\alpha_i \quad \sin\alpha_i \quad 0]^T \quad (۵) $$

که در آن α_i بیانگر زاویهٔ بین بردارهای یکه $\mathbf{v}_i$ و محور x_M است. ازآنجاکه در تحلیل بالانس نیرویی محاسبهٔ مقدار طول هر شاخه لازم است، برای یافتن مقادیر l_i ابتدا باید مقادیر b_i به‌دست آورده شود؛ بنابراین با ضرب طرفین رابطهٔ (٤) در $\mathbf{u}_i^T$ می‌توان نوشت:

$$ \mathbf{u}_i^T\mathbf{h} + b_i\mathbf{u}_i^T\,{}^B_M\mathbf{R}\,{}^M\mathbf{v}_i = a_i\mathbf{u}_i^T\mathbf{u}_i + l_i\mathbf{u}_i^T\mathbf{e}_i \quad (٦) $$

ازطرفی باتوجه به ساختار روبات و باتوجه به شکل (۲) می‌توان نوشت:

$$ \mathbf{u}_i^T\mathbf{h} = 0, \quad \mathbf{u}_i^T\mathbf{u}_i = 1, \quad \mathbf{u}_i^T\mathbf{e}_i = 0 \quad (۷) $$

با جای‌گذاری روابط فوق در رابطهٔ (٤) مقدار b_i به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$ b_i = a_i/\mathbf{u}_i^T\,{}^B_M\mathbf{R}\,{}^M\mathbf{v}_i \quad (۸) $$

با معلوم شدن b_i می‌توان l_i را به‌صورت ذیل محاسبه کرد:

$$ l_i = \|l_i\mathbf{e}_i\| = \left\|\mathbf{h} + b_i\,{}^B_M\mathbf{R}\,{}^M\mathbf{v}_i - a_i\mathbf{u}_i\right\| \quad (۹) $$

با محاسبهٔ l_i بردار یکه $\mathbf{e}_i$ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$ \mathbf{e}_i = (\mathbf{h} + b_i\,{}^B_M\mathbf{R}\,{}^M\mathbf{v}_i - a_i\mathbf{u}_i)/l_i \quad (۱۰) $$

بااستفاده از فرمول رودریگرز [33] داریم:

$$ \begin{aligned} \mathbf{e}_i = \mathbf{R}(\mathbf{u}_i, \theta_i)\mathbf{k} = cos\theta_i\mathbf{k} \\ + (1 - cos\theta_i)\mathbf{u}_i\mathbf{u}_i^T\mathbf{k} \\ + \sin\theta_i(\mathbf{u}_i \times \mathbf{k}) \end{aligned} \quad (۱۱) $$

ازآنجایی‌که بردار یکه $\mathbf{k}$ عمود بر بردارهای یکه $\mathbf{u}_i$ است، می‌توان نوشت:

$$ \begin{aligned} \mathbf{e}_i &= cos\theta_i\mathbf{k} + \sin\theta_i(\mathbf{u}_i \times \mathbf{k}) \\ &= [u_{iy}sin\theta_i \quad -u_{ix}sin\theta_i \quad cos\theta_i]^T \end{aligned} \quad (۱۲) $$

بنابراین مقدار دوران هر موتور را می‌توان به‌صورت زیر محاسبه کرد:

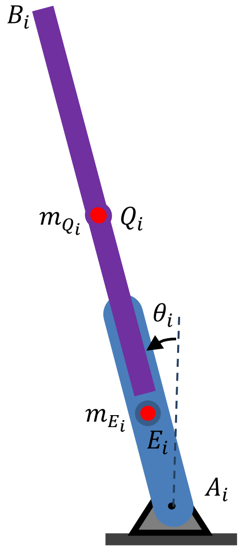
$$ \theta_i = Atan2\left(-\frac{e_{iy}}{u_{ix}}, e_{iz}\right) \; for \;\; i = 1,2,3 \quad (۱۳) $$

در این مقاله، مقدار دوران موتورها بااستفاده از حل مسئلهٔ سینماتیک برای مسیر داده‌شده برحسب زمان به‌دست می‌آید و سپس برای محاسبهٔ نیروهای لرزشی به‌عنوان ورودی مفاصل محرک در نرم‌افزار ADAMS مورد استفاده قرار می‌گیرد.

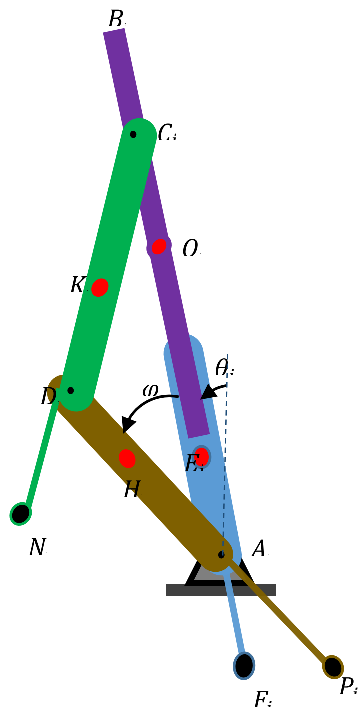
بالانس نیرویی روبات کروی 3(RPSP)-S

ازآنجاکه صفحهٔ متحرک حول یک مفصل کروی دوران می‌کند، بنابراین درصورتی‌که مرکز جرم آن بر مرکز مفصل کروی نیز منطبق نباشد، به‌آسانی می‌توان با اضافه کردن جرم نامیزان در طرف دیگر نیروی لرزشی ناشی از آن را به حداقل رسانید. بنابراین در این روبات، ارائهٔ روشی برای بالانس شاخه‌های روبات که دارای لینک‌های دورانی و لغزشی است، از اهمیت برخوردار است. برای این منظور پارامترهای جرمی روبات را قبل از بالانس نیرویی مطابق شکل (۳) درنظر می‌گیریم. مدل جرمی لینک‌ها برای بالانس نیرویی روبات، به‌صورت جرم متمرکز درنظر گرفته شده است. در این شکل جرم لینک دورانی (m_{E_i}) در نقطهٔ E_i، و جرم لینک لغزنده (m_{Q_i}) در نقطهٔ Q_i فرض شده است.

در شکل (۳) یک پایهٔ روبات قبل از بالانس نشان داده شده است.



شکل ۳ پارامترهای جرمی یک شاخه روبات قبل از بالانس نیرویی روبات



شکل ٤ لینک‌های کمکی اضافه‌شده و پارامترهای جرمی یک شاخه روبات برای بالانس نیرویی روبات

اکنون می‌توانیم نیروی لرزشی اعمالی به پایهٔ هر شاخه روبات که ناشی از اینرسی لینک‌ها است، به‌صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{F}_i = m_{Q_i}\ddot{\mathbf{d}}_{Q_i} + m_{E_i}\ddot{\mathbf{d}}_{E_i} \quad (١٤)$$

که به‌آسانی می‌توان گفت که ترم شتاب کوریولیس در $\ddot{\mathbf{d}}_{Q_i}$ مستتر است؛ بنابراین چنانچه خواسته باشیم از روش معمول اضافه‌کردن وزنه برای بالانس نیرویی استفاده کنیم، امکان پیچیده‌شدن بالانس روبات وجود دارد. به‌همین دلیل دو لینک کمکی به هر شاخه روبات به‌گونه‌ای اضافه می‌کنیم که بتواند باعث حذف نیروهای اینرسی ناشی از شتاب کوریولیس شود.

در شکل (٤) لینک‌های کمکی اضافه‌شده A_iD_i و D_iC_i به هر شاخه روبات نشان داده شده است. جرم لینک A_iD_i برابر با m_{H_i} و جرم لینک D_iC_i نیز برابر با m_{K_i} و به‌صورت متمرکز به‌ترتیب در نقاط H_i و K_i درنظر گرفته شده‌اند. برای بالانس جرمی هر شاخه نیز سه وزنهٔ بالانسی m_{P_i}، m_{N_i} و m_{F_i} به‌ترتیب در نقاط P_i، N_i و F_i درنظر گرفته شده است.

بنابراین نیروی لرزشی وارد به پایهٔ هر شاخه روبات را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{F}_i = m_{H_i}\ddot{\mathbf{d}}_{H_i} + m_{P_i}\ddot{\mathbf{d}}_{P_i} + m_{K_i}\ddot{\mathbf{d}}_{K_i} + m_{N_i}\ddot{\mathbf{d}}_{N_i} + m_{Q_i}\ddot{\mathbf{d}}_{Q_i} + m_{E_i}\ddot{\mathbf{d}}_{E_i} + m_{F_i}\ddot{\mathbf{d}}_{F_i} \quad (١٥)$$

که در آن $\ddot{\mathbf{d}}_{H_i}$، $\ddot{\mathbf{d}}_{P_i}$، $\ddot{\mathbf{d}}_{K_i}$، $\ddot{\mathbf{d}}_{N_i}$، $\ddot{\mathbf{d}}_{Q_i}$، $\ddot{\mathbf{d}}_{E_i}$ و $\ddot{\mathbf{d}}_{F_i}$ به‌ترتیب شتاب جرم‌های m_{H_i}، m_{P_i}، m_{K_i}، m_{N_i}، m_{Q_i}، m_{E_i} و m_{F_i} هستند که به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\ddot{\mathbf{d}}_{H_i} = r_{H_i}\ddot{\mathbf{d}}_{D_i} \quad (١٦)$$

$$\ddot{\mathbf{d}}_{P_i} = r_{P_i}\ddot{\mathbf{d}}_{D_i} \quad (١٧)$$

$$\ddot{\mathbf{d}}_{K_i} = \ddot{\mathbf{d}}_{D_i} + \ddot{\mathbf{d}}_{K_i/D_i} = \ddot{\mathbf{d}}_{D_i} + r_{K_i}\ddot{\mathbf{d}}_{C_i/D_i} \quad (١٨)$$

$$\ddot{\boldsymbol{d}}_{N_i} = \ddot{\boldsymbol{d}}_{D_i} + \ddot{\boldsymbol{d}}_{N_i/D_i} = \ddot{\boldsymbol{d}}_{D_i} + r_{N_i}\ddot{\boldsymbol{d}}_{C_i/D_i} \quad (۱۹)$$

$$\begin{aligned}\ddot{\boldsymbol{d}}_{Q_i} &= \ddot{\boldsymbol{d}}_{D_i} + \ddot{\boldsymbol{d}}_{C_i/D_i} + \ddot{\boldsymbol{d}}_{Q_i/C_i} \\ &= \ddot{\boldsymbol{d}}_{D_i} + \ddot{\boldsymbol{d}}_{C_i/D_i} + r_{Q_i}\ddot{\boldsymbol{d}}_{E_i}\end{aligned} \quad (۲۰)$$

$$\ddot{\boldsymbol{d}}_{F_i} = r_{F_i}\ddot{\boldsymbol{d}}_{E_i} \quad (۲۱)$$

در روابط فوق پارامترهای بی‌بعد ضـرایب شـتاب نیز به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$r_{H_i} = \|\boldsymbol{d}_{A_iH_i}\|/\|\boldsymbol{d}_{A_iD_i}\| \quad (۲۲)$$

$$r_{P_i} = -\|\boldsymbol{d}_{A_iP_i}\|/\|\boldsymbol{d}_{A_iD_i}\| \quad (۲۳)$$

$$r_{K_i} = \|\boldsymbol{d}_{D_iK_i}\|/\|\boldsymbol{d}_{D_iC_i}\| \quad (۲٤)$$

$$r_{N_i} = -\|\boldsymbol{d}_{D_iN_i}\|/\|\boldsymbol{d}_{D_iC_i}\| \quad (۲۵)$$

$$r_{Q_i} = -\|\boldsymbol{d}_{C_iQ_i}\|/\|\boldsymbol{d}_{A_iE_i}\| \quad (۲٦)$$

$$r_{F_i} = -\|\boldsymbol{d}_{A_iF_i}\|/\|\boldsymbol{d}_{A_iE_i}\| \quad (۲۷)$$

با جای‌گذاری روابط (۲۷-۱٦) در معادلـهٔ (۱۵) و ساده‌سازی آن می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_i &= \left(m_{H_i}r_{H_i} + m_{P_i}r_{P_i} + m_{K_i} + m_{N_i} + m_{Q_i}\right)\ddot{\boldsymbol{d}}_{D_i} \\ &+ \left(m_{K_i}r_{K_i} + m_{N_i}r_{N_i} + m_{Q_i}\right)\ddot{\boldsymbol{d}}_{C_i/D_i} \\ &+ \left(m_{Q_i}r_{Q_i} + m_{E_i} + m_{F_i}r_{F_i}\right)\ddot{\boldsymbol{d}}_{E_i}\end{aligned} \quad (۲۸)$$

همان‌طور که ملاحظـه مـی‌شـود، در معادلـهٔ فـوق ترمی که شامل شتاب کوریولیس باشـد، وجـود نـدارد. بنابراین برای حداقل‌سـازی نیـروی لرزشـی و بـالانس نیروی مکانیزم باید روابط زیر برقرار باشد:

$$m_{F_i} = -\left(m_{Q_i}r_{Q_i} + m_{E_i}\right)/r_{F_i} \quad (۲۹)$$

$$m_{N_i} = -\left(m_{K_i}r_{K_i} + m_{Q_i}\right)/r_{N_i} \quad (۳۰)$$

$$\begin{aligned}m_{P_i} &= \left(m_{K_i}r_{K_i} + \left(1 - r_{N_i}\right)m_{Q_i}\right)/\left(r_{P_i}r_{N_i}\right) \\ &-\left(m_{H_i}r_{H_i} + m_{K_i}\right)/r_{P_i}\end{aligned} \quad (۳۱)$$

در معادلات فوق تعدادی از پارامترها که مربوط به شاخه روبات است، ثابـت هسـتند و تعـداد دیگـری از پارامترهـای جرمـی و ابعـادی مربـوط بـه لینـک‌هـای اضـافه‌شـده را مـی‌تـوان بـه دل‌خـواه و یـا براسـاس محدودیت‌های طراحی انتخاب کرد.

مطالعهٔ موردی

در این قسمت برای بررسی صحت بالانس دینامیکی و حـداقل‌سـازی نیـروی لرزشـی، براسـاس مشخصـات هندسی، ابعادی و جرمی روبات و بااسـتفاده از روابـط پیش‌گفته، جرم وزنه‌های بالانس را به‌دست می‌آوریم و سپس بااستفاده از آنها صفحهٔ متحرک را در یک مسـیر دل‌خواه نسبت به زمان حرکت می‌دهیم. آن‌گاه بااستفاده از حـل مسـئلهٔ سـینماتیک معکـوس، مقـدار تغییـرات محرک‌ها را برحسب زمان به‌دست می‌آوریـم و از آنهـا به‌عنوان ورودی مدل ایجادشده در نرم‌افـزار ADAMS بهره می‌گیریم. درپایان، نیروهای تکیه‌گاهی را برای این حرکت در دو حالت بدون مکانیزم بالانس و با مکانیزم بالانس مورد بررسی قرار می‌دهیم و نتایج را با یکدیگر مقایسه می‌کنیم.

الف) پارامترهای هندسی، ابعادی و جرمی روبات برای $i = 1,2,3$

$\alpha_i = \lambda_i = \dfrac{2(i-1)\pi}{3} rad$
$a_i = 0.303\ m$
$h = 0.215\ m$
$A_iE_i = 0.1\ m$
$B_i = 0.12\ m$
$m_p = 10\ kg$
$m_{Q_i} = 1.2\ kg$
$m_{E_i} = 2.25\ kg$

ب) پارامترهای ابعادی و جرمی لینک‌های اضـافه‌شـده برای $i = 1,2,3$

$A_iD_i = D_iC_i = 0.25\ m$
$m_{H_i} = 3.27\ kg$
$m_{K_i} = 3.3\ kg$
$r_{H_i} = r_{K_i} = 0.5$
$r_{P_i} = r_{F_i} = -0.5$
$r_{N_i} = -1$
$r_{Q_i} = 0$

ج) محاسبهٔ جرم وزنه‌های بالانس.

بااستفاده از روابط پیش‌گفته جرم‌های بالانسی به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$m_{P_i} = 17.61\ kg, m_{N_i} = 2.76\ kg \quad , m_{F_i} = 4.5\ kg$$

د) حرکت رول (φ_x)، پیچ (φ_y) و یاو (φ_z) صفحهٔ متحرک.

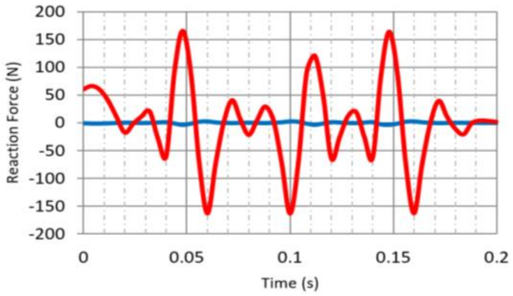
برای شبیه‌سازی حرکت، فرض می‌کنیم که تغییرات حرکت رول، پیچ و یاو صفحهٔ متحرک نسبت به زمان برحسب رادیان به‌صورت زیر باشد:

$$\varphi_x = \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$$
$$\varphi_y = 0$$
$$\varphi_z = \frac{\pi}{6}\sin\left(\frac{0.125\pi t}{T}\right)$$

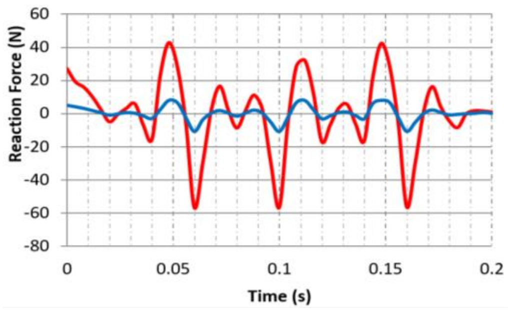
که در آن $T = 2\pi$ درنظر گرفته شده است.

ه) شبیه‌سازی دینامیکی.

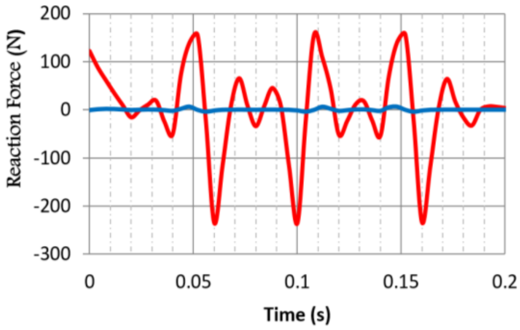
ابتدا با حل مسئلهٔ سینماتیک معکوس براساس پارامترهای هندسی و ابعادی داده‌شدهٔ روبات، تغییرات مفاصل محرک روبات را برحسب زمان به‌دست می‌آوریم. سپس آنها را به‌عنوان ورودی برای دو مدل ساخته‌شده در نرم‌افزار ADAMS به‌کار می‌گیریم. یکی از مدل‌ها، مدل اصلی روبات است و در مدل دیگر لینک‌های اضافه‌شده با جرم‌های بالانسی نیز مدل شده است. برای هر کدام از دو مدل نیروهای اعمالی به پایهٔ روبات از طرف هر سه شاخه روبات در جهت‌های مختلف به‌دست آورده شده است. این نیروها در شکل‌های (۷-۵) به‌ترتیب درراستای محور x، y و z برای حالت‌های قبل از بالانس و پس از بالانس نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود نیروهای اعمالی به پایهٔ روبات به‌صورت قابل ملاحظه‌ای کاهش یافته است. برای مقایسهٔ بهتر، مقادیر نیروهای تکیه‌گاهی در دستگاه ثابت {B} در زمان‌های مختلف برای هر دو مدل در جدول‌های (۳-۱) در جهت‌های مختلف آورده شده است. همچنین در این جدول‌ها درصد کاهش نیروهای تکیه‌گاهی نیز آورده شده است. این نتایج نشان می‌دهد که نیروهای لرزشی منتقل‌شده به پایهٔ روبات به‌طور میانگین درراستای x، ۹۸ درصد، درراستای y، ۷۹ درصد و درراستای z، ۹۹.٤ درصد کاهش یافته است.



شکل ۵ نیروی لرزشی کل وارد به روبات پیش و پس از بالانس درراستای **X** (نمودار قرمز پیش از بالانس و نمودار آبی پس از بالانس را نشان می‌دهد)



شکل ٦ نیروی لرزشی کل وارد به روبات پیش و پس از بالانس درراستای **Y** (نمودار قرمز پیش از بالانس و نمودار آبی پس از بالانس را نشان می‌دهد)



شکل ۷ نیروی لرزشی کل وارد به روبات پیش و پس از بالانس درراستای Z (نمودار قرمز پیش از بالانس و نمودار آبی پس از بالانس را نشان می‌دهد)

جدول ۱ مقایسهٔ نیروهای لرزشی پیش و پس از بالانس دراستای محور **X**

درصد کاهش	نیروی لرزشی بعد از بالانس	نیروی لرزشی قبل از بالانس	زمان
۹۸.۹۵۱۷	-۰.۶۳۵۹	۶۰.۶۵۹۷	۰
۹۸.۵۵۰۵	-۱.۲۸۶۷	۸۸.۷۶۸۱	۰.۰۵۲
۹۸.۴۹۶۵	۲.۴۵۱۵	-۱۶۳.۰۵۳	۰.۱
۹۸.۵۱۴۷	-۱.۳۲۴۱	۸۹.۱۴۴۶	۰.۱۵۲
۹۸.۳۱۱۹	-۰.۰۳۲	۱.۸۹۵۶	۰.۲

جدول ۲ مقایسهٔ نیروهای لرزشی پیش و پس از بالانس دراستای محور **Y**

درصد کاهش	نیروی لرزشی بعد از بالانس	نیروی لرزشی قبل از بالانس	زمان
۸۱.۵۱۷۶	۵.۰۲۴۴	۲۷.۱۸۴۸	۰
۷۶.۷۶۴۴	۶.۵۶۴	۲۸.۲۴۹۷	۰.۰۵۲
۸۰.۹۵۸۲	-۱۰.۷۶۰۳	-۵۶.۵۰۸۷	۰.۱
۷۶.۴۵۵	۶.۶۴۹۲	۲۸.۲۴۰۴	۰.۱۵۲
۸۲.۹۹۷۵	۰.۱۶۷۹	۰.۹۸۷۵	۰.۲

جدول ۳ مقایسهٔ نیروهای لرزشی پیش و پس از بالانس دراستای محور **Z**

درصد کاهش	نیروی لرزشی بعد از بالانس	نیروی لرزشی قبل از بالانس	زمان
۹۹.۲۲۵۶	-۰.۹۴۴۳	۱۲۱.۸۹۸۶	۰
۹۹.۶۹۵۳	-۰.۴۷۳	۱۵۵.۲۳۲۲	۰.۰۵۲
۹۹.۳۱۶	-۱.۶۱۳۷	-۲۳۵.۹۳۶	۰.۱
۹۹.۷۴۷۸	-۰.۳۹۴	۱۵۶.۲۱۱۵	۰.۱۵۲
۹۹.۴۲۹	۰.۰۱۹۷	۳.۴۴۹۹	۰.۲

نتایج

در این مقاله بالانس نیرویی روبات موازی کروی با ساختار 3<u>R</u>PSP-S بااستفاده از روش افزودن مکانیزم اضافه بررسی شد. حذف نیروهای اینرسی منتقل‌شده به پایهٔ روبات یک چالش اساسی برای این‌گونه روبات‌ها محسوب می‌شود. در روبات موردنظر به‌دلیل استفاده از مفاصل لغزشی و وجود قید رفت‌وبرگشتی، از روش معمول افزودن وزنه استفاده نشد بلکه از یک مکانیزم اضافه و اتصال آن به هر شاخه روبات به‌گونه‌ای استفاده شد که باعث حذف شتاب‌های کوریولیس و درنتیجه حذف نیروهای لرزشی ناشی از رفت‌وبرگشت جرم لغزنده در معادلات بالانس نیرویی روبات شد. سپس با افزودن سه وزنه به مکانیزم اضافه‌شده و هر شاخه روبات، بالانس نیرویی روبات انجام گردید. سپس با حل مسئلهٔ سینماتیک معکوس براساس پارامترهای هندسی و ابعادی دادهٔشدهٔ روبات، تغییرات مفاصل محرک روبات را برحسب زمان به‌دست آمد و آنها به‌عنوان ورودی برای دو مدل ساخته‌شده در نرم‌افزار آدامز به‌کار گرفته شد و نشان داده شد که بااستفاده از روش ارائه‌شده، نیروهای لرزشی منتقل‌شده به پایهٔ روبات به‌طور میانگین درراستای x، ۹۸ درصد، درراستای y، ۷۹ درصد و درراستای z، ۹۹.۴ درصد کاهش یافته است. لازم به ذکر است که می‌توان از این روش برای هر روبات دیگری که قید رفت‌وبرگشتی داشته باشد، استفاده کرد و همچنین می‌توان به‌عنوان کارهای آینده یک روش بهینه‌سازی روی این روش پیاده کرد که نسبت افزایش جرم و کاهش نیروی لرزشی به‌صرفه باشد.

مراجع

1. MacCallion, H., Pham, D. T., "The analysis of a six-degree-of-freedom workstation for mechanized assembly", *Proceeding of the 5th World Congress on Theory of Machines and Mechanisms*, Montreal, Canada, July 8-13, (1979).

2. Hunt, K.H., "Structural Kinematics In-Parallel-Actuated Robot Arms", *Journal of Mechanism, Transmissions, and Automation in Design*, Vol. 105, pp. 705-712, (1983).
3. Briot, S., Arakelian, V.G. and Le Baron, J.P., "Shaking force minimization of high-speed robots via centre of mass acceleration control", *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 57, pp. 1–12, (2012).
4. Arakelian, V.G. and Smith, M.R., "Shaking force and shaking moment balancing of mechanisms: a historical review with new examples", *Mechanical Design*, Vol. 127, pp. 334-339, (2005).
5. Arakelian, V.H. and Smith, M.R., "Design of planar 3-DOF 3-RRR reactionless parallel manipulators", *Mechatronics*, Vol. 18, pp. 601-606, (2008).
6. Agrawal, S.K. and Fattah, A., "Reactionless space and ground robots: novel designs and concept studies", *Mechanism and Machine theory*, Vol. 39, pp. 25-40, (2004).
7. Gosselin, C.M. and Laliberté, T., "Static balancing of spatial parallel platform mechanisms—revisited", *ASME Journal of Mechanical Design*, Vol. 122, pp. 43-51, (2000).
8. Chaudhary, K. and Chaudhary, H., "Dynamic balancing of planar mechanisms using genetic algorithm", *Journal of Mechanical Science and Technology*, Vol. 28, pp. 4213, (2014).
9. Van der Wijk, V. and Herder, J.L., "Synthesis method for linkages with center of mass at invariant link point—pantograph based mechanisms", *Mechanism and machine theory*, Vol. 48, pp. 15-28, (2012).
10. Alici, G. and Shirinzadeh, B., "Optimum force balancing with mass distribution and a single elastic element for a five-bar parallel manipulator", *Proceedings of ICRA'03. IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Vol. 4, (2003).
11. Nehemiah, P., Rao, B.S.S. and Ramji, K., "Shaking force and shaking moment balancing of planar mechanisms with high degree of complexity", *Jordan Journal of Mechanical and Industrial Engineering*, Vol. 6, pp. 17-24, (2012).
12. Ricard, R. and Gosselin, C.M., "On the development of reactionless parallel manipulators", *Proceedings of the ASME Design Engineering Technical Conference and Computers and Information in Engineering Conference*, Baltimore, Maryland, US, September 10-14, (2000).
13. Papadopoulos, E. and Abu-Abed, A., "Design and motion planning for a zero-reaction manipulator", *Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 1554-1559, San Diego, USA, May 8-13, (1994).
14. Fattah, A. and Agrawal, S.K., "On the design of reactionless 3-DOF planar parallel mechanisms", *Mechanism and Machine theory*, Vol. 41, pp. 70-82, (2006).
15. Van der Wijk, V. and Herder, J.L., "Active dynamic balancing unit for controlled shaking force and shaking moment balancing", *ASME 2010 International Design Engineering Technical Conferences (IDETC) and Computers and Information in Engineering Conference (CIE)*, pp. 1515-1522, Montréal , Canada, August 15-18, (2010).
16. Arakelian, V. and Smith, M.R., "Shaking force and shaking moment balancing of mechanisms: a historical review with new examples", *ASME Journal of Mechanical Design*, Vol. 127, pp. 334-339, (2005).
17. Chung, W.K. and Cho, H.S., "On the dynamic characteristics of a balance PUMA-760 robot", *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, Vol. 35, pp. 222-230, (1988).
18. Ebert-Uphoff, I. and Johnson, K., "Practical Considerations for the Use of Static Balancing for Parallel Kinematic Machines", *IMechE Journal of Multi-body Dynamics: Part K*, 216, pp. 73-85, (1997).

19. Russo, A., Sinatra, R. and Xi, F., "Static balancing of parallel robots", *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 40, pp. 191-202, (2005).
20. Wijk, V. and Herder, J.L., "*Guidelines for low mass and low inertia dynamic balancing of mechanisms and robotics*", *Advances in Robotics Research: Theory, Implementation, Application*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Berlin, (2009).
21. Briot, S., Arakelian, V., Sauvestre, N. and Baron, J.P., "Shaking forces minimization of high-speed robots via an optimal motion planning", *ROMANSY 18 Robot Design, Dynamics and Control*, Springer-Verlag Wien, (2010).
22. Briot, S. and Arakelian, V., "Complete shaking force and shaking moment balancing of in-line four-bar linkages by adding a class-two RRR or RRP Assur group", *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 57, pp. 13-26, (2012).
23. Wu, Y. and Gosselin, C., "Design of reactionless 3-DOF and 6-DOF parallel manipulators using parallelepiped mechanisms", *IEEE Transactions on Robotics*, Vol. 21, pp. 821-833, (2005).
24. Alici, G. and Shirinzadeh, B., "Optimum force balancing of a planar parallel manipulator", *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, Vol. 217, pp. 515-524, (2003).
25. Alici, G. and Shirinzadeh, B., "Optimum synthesis of planar parallel manipulators based on kinematic isotropy and force balancing", *Robotica*, Vol. 22, pp. 97-108, (2004).
26. Dresig, H. and Dien, N.P., "Complete shaking force and shaking moment balancing of mechanisms using a moving rigid body", *Technische Mechanik*, Vol. 31, pp. 121-131, (2011).
27. Arakelian, V., Briot, S., Yatsun, S. and Yatsun, A., "A new 3-DoF planar parallel manipulator with unlimited rotation capability", *Proceedings of 13th World Congress in Robot and Machine Science*, Guanajuato, Mexico, June 19-23, (2011).
28. Chaudhary, K. and Chaudhary, H., "Optimal dynamic balancing and shape synthesis of links in planar mechanisms", *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 93, pp. 127-146, (2015).
29. Van Der Wijk, V., Krut, S., Pierrot, F. and Herder, J., "Generic method for deriving the general shaking force balance conditions of parallel manipulators with application to a redundant planar 4-RRR parallel manipulator", *Proceedings of the 13th World Congress in Mechanism and Machine Science*, Guanajuato, Mexico, June 19-23, (2011).
30. Van Der Wijk, V., Krut, S., Pierrot, F. and Herder, J.L., "Design and experimental evaluation of a dynamically balanced redundant planar 4-RRR parallel manipulator", *The International Journal of Robotics Research*, Vol. 32, pp. 744-759, (2013).
31. Arakelian, V. and Briot, S., "*Balancing of linkages and robot manipulators: advanced methods with illustrative examples*", Springer International Publishing Switzerland, (2015).
32. Van der Wijk, V. and Herder, J.L., "*Dynamic balancing of Clavel's Delta robot*", Computational Kinematics. Springer, Berlin, Heidelberg, (2009).
33. Wampler, C.W., "On a rigid body subject to point-plane constraints", *Journal of Mechanical Design*, Vol. 128, pp. 151-158, (2006).